02MECH - zápočtová písemka č. 2

(1) Kulečník

Při kulečníku odpálíte kouli rychlostí v tak, že zasáhnete dvě další koule najednou. Všechny koule jsou hmotné body o hmotnosti m. Srážka je pružná a symetrická, tj. koule odletí pod úhly θ a $2\pi - \theta$ vzhledem k pohybu původní koule. Následkem srážky se původní koule zastaví. Pod jakým úhlem a jakou rychlostí odpálené koule poletí?

Řešení. *Nacházíme se ve dvou dimenzích, budeme mít tedy tři neznámé a rádi bychom napsali tři zákony zachování, abychom mohli úlohu snadno vyřešit. Jeden zákon zachování je ale triviální ze symetrie úlohy (zachování hybnosti ve směru y), zůstávají nám tedy zákon zachování energie a hybnosti ve směru x*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= 2\frac{1}{2}mv'^2 \\ mv &= 2mv'\cos\theta \end{aligned}$$

které snadno vyřešíme s výsledkem $v' = v/\sqrt{2}$ a $\theta = \pi/4$ neboli 45 stupňů.

(2) Kuličky na niti (Štoll 3.11)

Dvě ocelové kuličky o hmotnostech $m_1 < m_2$ jsou zavěšeny vedle sebe na laně délky l. Lehčí z kuliček vychýlíme o 90 stupňů a pustíme, aby se kuličky pružně srazily. Do jakých výšek kuličky vystoupí? Jaký musí být poměr jejich hmotností, aby tyto výšky byly stejné?

Řešení. *Vychýlená kulička má potenciální energii mgl, která se pádem celá přemění na energii kinetickou $T = \frac{1}{2}mv^2$, takže její rychlost těsně před srážkou je*

$$v_1 = \sqrt{2gl}$$

K určení rychlosti obou koulí po srážce (tj. dvě neznámé v_1' a v_2') využijeme zákonů zachování hybnosti a energie, tzn.

$$\begin{aligned} m_1v_1 &= m_1v_1' - m_2v_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme v_1' a dosadíme do druhé z rovnic, ze ktere po pár úpravách dostaneme

$$v_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl}$$

Nyní stačí stejným způsobem jako na začátku převézt kinetickou energii kuličky na energii potenciální v gravitačním poli a vyjádřit výslednou výšku. Pokud stejný postup zopakujeme i pro druhou kuličku, dostaneme výsledek

$$h_2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 l \qquad h_1 = \frac{4m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l$$

Pokud mají být výšky kuliček stejné, platí $h_1 = h_2$, což můžeme upravit na kvadratickou rovnici pro poměr hmotností

$$3\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2} - 1 = 0$$

s výsledkem $\frac{m_1}{m_2} = \pm\frac{1}{3}$ (jelikož je hmotnost vždycky kladná, bereme kladné znaménko jako fyzikální).

(3) Auto na setrvačník

Uvažujte auto na hraní, jehož kola roztočíte ve vzduchu na úhlovou rychlost ω. Auto se skládá ze čtyř kol tvaru válce o hmotnosti m a poloměru r, a z karoserie hmotnosti M. Auto následně položíme na zem, kde se začne bez prokluzování pohybovat vpřed. Jaká bude jeho rychlost?

Řešení. *Tušíme, že budeme potřebovat moment setrvačnosti válce kolem jeho osy symetrie, tudíž si ho předem spočítáme, přičemž využijeme cylindrických souřadnic*

$$\begin{aligned} I = \int (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 \rho(r, \varphi, z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz = \\ &= 2\pi\, h\, \rho \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi}{2}\rho\, h\, r^4 = \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned}$$

Auto ve vzduchu má tedy energii rovnou čtyřem rotujícím válcům $E = \frac{1}{2}\sum I_\alpha \omega_\alpha^2 = mr^2\omega^2$. Auto na zemi má jak rotační energii kol, tak translační energii dopředného pohybu celého auta. Tyto dvě energie se prostě sečtou jako

$$E = 4\left(\frac{1}{2} I \omega'^2\right) + \frac{1}{2}(M + 4m)v'^2$$

kde mezi úhlovou a dopřednou rychlostí platí vztah $v = \omega r$. Nakonec uplatníme zákon zachování energie, který nám dá rovnítko mezi energií auta ve vzduchu a na zemi, tj.

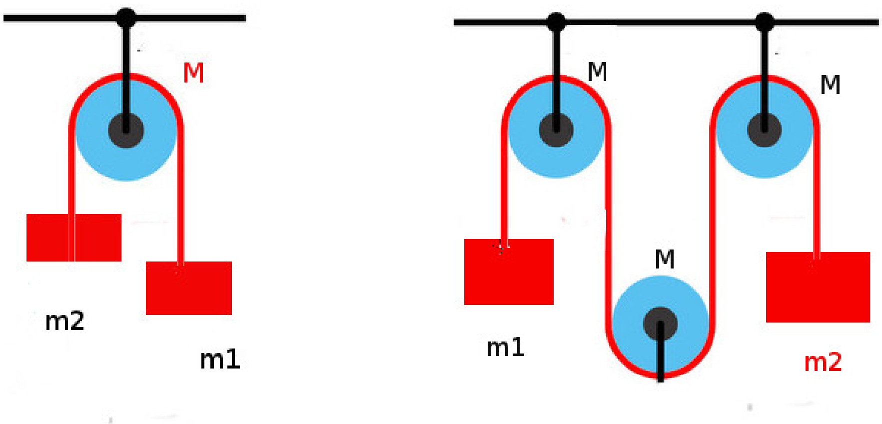
$$mr^2\omega^2 = 2I\frac{v'^2}{r^2} + \frac{1}{2}(M + 4m)v'^2 = mv'^2 + \frac{1}{2}(M + 4m)v'^2$$

z čehož už dokážeme vyjádřit výslednou rychlost

$$v' = \sqrt{\frac{2mr^2\omega^2}{6m + M}}$$

(4) Kladkostroj (Štoll 4.14)

Přes kladku z prvního obrázku představující válec o hmotnosti M a poloměru R jsou zavěšena břemena o hmotnostech m_1 a m_2 . Závěs na kladce neprokluzuje. S jakých zrychlením bude klesat těžší břemeno? (**BONUS**: jak bude situace vypadat pro dvojitou kladku z druhého obrázku?).



Řešení. *Na kladku pusobí na každé straně pomocí lana těleso, které je přitahováno gravitací. Naopak proti této síle působí (pro nás neznámá) síla napínání lana. Jelikož má lano konstantní délku, musí být zrychlení jednoho tělesa opakem zrychlení toho druhého. Výsledkem této diskuse jsou Newtonovy rovnice*

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - F_1 \\ -m_2 a &= m_2 g - F_2 \end{aligned}$$

Síly působící na lano na jednotlivých stranách kladky ale nejsou obecně stejné, máme tedy dvě rovnice pro tři neznámé. Navíc z rovnic nahoře to na oko vypadá, že síly F_1 a F_2 působí ve stejném bodě, což není pravda. Oba problémy najednou vyřešíme třetí rovnici, která je modifikací II. impulsové věty.

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\Omega}{dt} = I\varepsilon = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \times \vec{r}_\alpha = F_1 r - F_2 r$$

kde pro úhlové zrychlení platí díky kruhovému pohybu vztah $a = \varepsilon r$. Nyní již máme potřebné tři rovnice, takže můžeme dosadit za obě neznámé síly a vyjádřit výsledek jako

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g$$

Výsledek pro dvojitou kladku (bonus) přibude časem :-)