02MECH - zápočtová písemka č. 1

24.11.2016

(1) Tenista v nesnázích

Jakou minimální rychlostí musí tenista odehrát míček halfvolejem (tj. od země), aby přeletěl přes síť o výšce h? Vzdálenost tenisty od sítě je l, a jeho raketa při úderu míček odpálí pod úhlem 30 stupňů. Při jaké výšce h už tenista nedokáže síť přehodit? Zanedbejte odpor vzduchu.

Řešení. *Řešíme úlohu pro šikmý vrh, přičemž pozici naší rakety umístíme do bodu $(0, 0)$ - stačí nám použít dvě dimenze. Pohyb částice tedy probíhá po trajektorii (kde jsme vyjádřili složky kartézských rychlostí jako projekce rychlosti v)*

$$x(t) = v \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) t = \frac{\sqrt{3}vt}{2}$$
$$y(t) = v \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) t - \frac{gt^2}{2} = \frac{vt}{2} - \frac{gt^2}{2}$$

Označíme si jako T čas, kdy míček dorazí k síti. To znamená, že platí

$$x(T) = \frac{\sqrt{3}vT}{2} = l$$

Z téhle rovnice vyjádříme T (kterého se potřebujeme zbavit) a dosadíme do rovnice zbývající. U té následně požadujeme, aby výška míčku byla alespoň h, tj.

$$y(T) = \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{2gl^2}{3v^2} = h$$

Teď už snadno vyjádříme hledanou rychlost jako

$$v = \sqrt{\frac{2gl^2}{\sqrt{3}l - 3h}}$$

Tato rychlost se stává nekonečnou $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ (míček by v takovém případě musel letět po přímce). Pokud bude síť vyšší než tato hodnota, nemáme ji šanci přelobovat.

(2) Vivianiho křivka

Částice se v inerciální soustavě pohybuje po tzv. Vivianiho křivce, což je prostorová křivka zadaná parametricky jako

$$x(t) = a\sin(t)\cos(t)$$
$$y(t) = a\sin(t)\sin(t) - \frac{a}{2}$$
$$z(t) = a\cos(t)$$

Jaká sila na takovou částici působí? Ukažte, že hledaná síla je konzervativní, tj, najděte potenciální energii $U(x, y, z)$ takovou, že $F = -\nabla U$. Podle tvaru potenciální energie potom rozhodněte, o jaký systém se jedná.

Řešení. *Budeme používat druhý Newtonův zákon, musíme tedy naše pohybové rovnice dvakrát zderivovat. Dostáváme výsledek*

$$F(x) = m\ddot{x}(t) = -4ma\sin(t)\cos(t) = -4mx(t)$$
$$F(y) = m\ddot{y}(t) = -8ma\sin(t)\sin(t) - 4a = -8my(t)$$
$$F(z) = m\ddot{z}(t) = -ma\cos(t) = -mz(t)$$

tzn. druhé derivace našich parametrických funkcí lze snadno vyjádřit pomocí funkcí samotných. Potenciální energii můžeme v takovém případě hledat ve tvaru součtu $U(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$*, s výsledkem*

$$U(x, y, z) = 4\frac{mx^2}{2} + 8\frac{my^2}{2} + \frac{mz^2}{2}$$

Tahle potenciální energie zjevně odpovídá prostorovému harmonickému oscilátoru, který je ovšem neizotropní (tj. v každém směru kmitá s jinou frekvencí).

(3) Jacobiho identita

Vektorový součin není asociativní, tj. při násobení tří a více členů záleží na pořadí závorkek. Vektorový součin je dokonce v jistém smyslu maximálně neasociativní - splňuje Jacobiho identitu

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$$

Dokažte ji.

Řešení. *Víme, že platí*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{bmatrix}$$

a tedy

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \begin{bmatrix} a_2b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} c_2a_1b_1 - c_2a_2b_1 - c_3a_3b_1 + c_3a_1b_3 \\ c_3a_2b_3 - c_3a_3b_2 - c_1a_1b_2 + c_1a_2b_1 \\ c_1a_3b_1 - c_1a_1b_3 - c_2a_2b_3 + c_2a_3b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2c_1a_1 - b_2c_2a_1 - b_3c_3a_1 + b_3c_1a_3 \\ b_3c_2a_3 - b_3c_3a_2 - b_1c_1a_2 + b_1c_2a_1 \\ b_1c_3a_1 - b_1c_1a_3 - b_2c_2a_3 + b_2c_3a_2 \end{bmatrix} = 0$$

(4) Velká galaktická zeď

Uvažujte dlouhou 1D zeď (tj. úsečku) o délce l a lineární hustotě ρ. Jakou gravitační silou působí zeď na částici o hmotnosti m, která leží ve vzdálenosti h ode zdi přímo nad jejím středem? Zůstává síla konečná i pro nekonečně dlouhou zeď $l \to \infty$? (pozor na rozdíl mezi diferenciálem dF a jeho projekcí dF_z do osy kolmé ke zdi).

BONUS: Jak se změní situace v případě 2D zdi, tj. roviny?

Řešení. *Budeme pracovat ve dvou dimenzích, jejich kartézské souřadnice si označíme jako x a z. Z Newtonova gravitačního zákona vyjádříme diferenciál síly působící na částici jako*

$$dF = \frac{(\kappa m\rho)dx}{r^2} = \frac{(\kappa m\rho)dx}{x^2 + h^2}$$

kde x je vzdálenost příslušného elementu tyče od jejího středu. Chceme dostat projekci této síly do směru osy z (protože dopředu tušíme, že jenom tím směrem bude síla netriviálně působit). Dostaneme jí jako

$$dF_z = dF \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{(\kappa m\rho h)dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Tenhle výraz už můžeme smysluplně integrovat, s výsledkem

$$F_z = \int dF_z = \kappa\rho m h \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \kappa\rho m h \left[\frac{x}{h^2\sqrt{x^2 + h^2}}\right]_{-l/2}^{l/2} =$$
$$= \frac{\kappa\rho m l}{h\sqrt{l^2/4 + h^2}} = \frac{\kappa m\rho}{h\sqrt{1/4 + h^2/l^2}} \to \frac{2\kappa m\rho}{h}$$

pro $l \to \infty$. Výraz tedy zůstává konečný, i když ve zdi samotné je nekonečně hmoty, a mohla by tedy teoreticky působit nekonečnou silou. Pro 2D nekonečnou zeď můžeme využít tohoto výsledku, a chápat rovinu jako soustavu rovnoběžných přímek parametrizovaných novou souřadnicí y. Vzdálenost našeho bodu od roviny označíme v, a pro výslednou sílu můžeme psát

$$F_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\kappa m\rho}{\sqrt{v^2 + y^2}} \frac{v}{\sqrt{v^2 + y^2}} dy = 2\kappa m\rho \left[\arctan\left(\frac{y}{v}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi\kappa m\rho$$

To znamená, že výsledná síla nejenže je konečná, ona je dokonce v celém prostoru konstantní!